III.3 Faktör Yüklerinin Tek Olmayışlığı

Eşitlik (3.3) ile verilen $\underline{X} - \underline{\mu} = L\underline{F} + \underline{\varepsilon}$ modelini ele alalım. Ortak faktör sayısının $m > 1$ olması durumunda L faktör yükleri matrisi ortogonal bir matris ile tek türlü belirlenebilir. Bu belirlemenin sonucu olarak faktör yüklerinin tek olmadığını ama yeni faktör yüklerinin de $\Sigma = LL' + \Psi$ eşitliğindeki kovaryans matrisini tekrar türetebileceğini söylemek mümkündür.

Gerçekten $T: m \times m$ boyutlu bir ortogonal matris olsun. Biliyoruz ki $TT' = T'T = I$ dır. Şimdi TT' terimini verilen faktör modeline aşağıdaki gibi katalım.

$$\underline{X} - \underline{\mu} = L\underline{F} + \underline{\varepsilon} = LTT'\underline{F} + \underline{\varepsilon} = (LT)(T'\underline{F}) + \underline{\varepsilon} = L^*\underline{F}^* + \underline{\varepsilon} \tag{3.16}$$

yazılabilir. Burada $L^* = LT$ ve $\underline{F}^* = T'\underline{F}$ olup, bu yeni modele göre yeni faktör yükleri matrisi $L^*: p \times m$ matrisi iken yeni ortak faktörler vektörü $\underline{F}^*: m \times 1$ vektörü olacaktır. Bu sebeple faktör yükleri tek değildir, ancak bu tek olmayışlığın belirlenmesi tek türlüdür, yani sadece bir ortogonal matris yardımıyla yapılabilir. Her ne kadar faktör yükleri tek olmasa da bu durum kovaryans matrisinin faktörleşmesini etkilemez. Yani kovaryans matrisinin faktörleşme yapısı her iki faktör yüklerinden de ortaya çıkarılabilir. Bir diğer ifadeyle Σ kovaryans matrisi L faktör yükleri ile türetilebildiği gibi matrisi L^* faktör yükleri ile de türetilebilir. Şöyle ki; Σ kovaryans matrisinin L faktör yüklerinden türetilmesini veren faktörleşme yapısını ele alalım.

$$\Sigma = LL' + \Psi = LTT'L' + \Psi = (LT)T'L' + \Psi = (LT)(LT)' + \Psi = L^*L^{*\prime} + \Psi$$

elde edilir. Görüldüğü gibi L faktör yükleri ile $L^* = LT$ faktör yükleri genellikle birbirlerinden farklı olmalarına rağmen her ikisi de sistemdeki değişkenlere ait kovaryans yapısını açıklayabilirler.

Böylece Eşitlik (3.16)'da verilen yeni modelin ortak faktörleri olan $\underline{F}^* = T'\underline{F}$ faktörleri de ortogonal faktör modeline ait varsayımları sağlar. Yani $E(\underline{F}^*) = \underline{0}\,, Cov(\underline{F}^*) = I_m$ ve $Cov(\underline{F}^*, \underline{\varepsilon}) = [0]$ olduğu gösterilebilir.

- ✓ $E(\underline{F}^*) = E(T'\underline{F}) = T'E(\underline{F}) = T' \times \underline{0} = \underline{0}$
- ✓ $Cov(\underline{F}^*) = Cov(T'\underline{F}) = T'Cov(\underline{F})T = T'I_mT = T'T = I_m$
- ✓ $Cov(\underline{F}^*, \underline{\varepsilon}) = Cov(T'\underline{F}, \underline{\varepsilon}) = T'Cov(\underline{F}, \underline{\varepsilon}) = T' \times [0] = [0]$.

Bu varsayımlarla birlikte hata vektörüne ait $E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}$ ve $Cov(\underline{\varepsilon}) = \Psi$ olduğu varsayımları da dikkate alındığında Eşitlik (3.16) ile verilen yen faktör modeli de bir ortogonal faktör modelidir.

Ortogonal faktör modelinde model geçerliliğinin önemli kriterlerinden birisi olan değişkenlere ait komünaliteler $\left(h_j^2\right)$yeni faktör yüklerinden etkilenmezler. Bu durum ortogonal faktör modelinin önemli avantajlarından birisidir. Eşitlik (3.3) ile verilen ortogonal faktör modelinde X_j değişkenine ait komünalite Eşitlik (3.9) da ifade edildiği gibi $h_j^2 = l_{j1}^2 + l_{j2}^2 + \cdots + l_{jm}^2$, $(j = 1, 2, \dots, p)$ dir. Bu h_j^2 komünalitesi L faktör yükleri matrisinin j-nci satırındaki elemanlarının kareleri toplamıdır. Eğer L matrisinin j-nci satırını $\underline{l}'_j = \left[l_{j1} \;\; l_{j2} \;\; \dots \;\; l_{jm}\right]$ ile gösterirsek, o zaman kareler toplamı (veya komünalite) vektör notasyonu ile $h_j^2 = \underline{l}'_j \underline{l}_j$şeklinde yazılır. Eşitlik (3.16) ile verilen yeni faktör yükleri ile tanımlanan ortogonal faktör modeline ait $L^* = LT$ faktör yükleri matrisinin j-nci satırı $\underline{l}_j^{*\prime} = \underline{l}'_j T$ şeklinde olup, yeni modelde X_j değişkenine karşılık gelen komünalite;

$$h_j^{*2} = \underline{l}_j^{*\prime} \underline{l}_j^* = \left(\underline{l}'_j T\right)\left(\underline{l}'_j T\right)' = \underline{l}'_j T T' \underline{l}_j = \underline{l}'_j \underline{l}_j = h_j^2 \; , j = 1, 2, \dots, p \qquad (3.17)$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi komünaliteler, faktör yükleri üzerine uygulanan ortogonal dönüşümlerden etkilenmemektedir. Burada $h_j^2 = l_{j1}^2 + l_{j2}^2 + \cdots + l_{jm}^2 = \underline{l}'_j \underline{l}_j$, $(j = 1, 2, \dots, p)$ komünalitesi aynı zamanda faktör yüklerinin m-boyutlu uzayında orijinden $\underline{l}'_j = \left[l_{j1} \;\; l_{j2} \;\; \dots \;\; l_{jm}\right]$ noktasına olan uzaklıktır. Eşitlik (3.17)'ye göre $\underline{l}'_j \underline{l}_j$ uzaklığı, $\underline{l}_j^{*\prime} \underline{l}_j^*$ uzaklığı ile aynı olduğundan $\underline{l}_j^* = \left[l_{j1}^* \;\; l_{j2}^* \;\; \dots. \;\; l_{jm}^*\right]$ noktaları, $\underline{l}'_j = \left[l_{j1} \;\; l_{j2} \;\; \dots \;\; l_{jm}\right]$ noktalarından döndürülerek elde edilebilir. Buna göre bir vektörün bir ortogonal matris ile çarpımı, eksenlerin döndürülmesine denktir. Sonuç olarak L ve L^* faktör yükleri matrisinin her ikisi de aynı yorumu verecektir. $LL' = L^* L^{*\prime}$ matrisinin esas köşegen elemanları j-nci değişkene ait komünalite olup, komünaliteler T matrisinden bağımsızdır.

Eğer kitle kovaryans matrisi olan Σ matrisi bilinmiyorsa ortogonal faktör modeli için aynı işlemler, kitleden çekilen n birimlik örneklemden hesaplanacak olan örnek kovaryans matrisi $S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{X}_i - \underline{\overline{X}}\right)\left(\underline{X}_i - \underline{\overline{X}}\right)'$ üzerinde tekrarlanır.

Eşitlik (3.3) ile verilen $\underline{X} - \underline{\mu} = L\underline{F} + \underline{\varepsilon}$ modeli üzerinde gerçekleştirilen bütün bu işlemlerin, Eşitlik (3.4) ile verilen ve standart değişkenlerden türetilen $\underline{Z} = L\underline{F} + \underline{\varepsilon}$ faktör analizi modeli için de geçerli olduğu gösterilebilir.

Faktör analizinde esas amaç $L = \left[l_{jk}\right]$ faktör yükleri matrisinin elde edilmesidir. Bundan başka j-ni değişken $\left(X_j\right)$ ile k-ncı faktör $\left(f_k\right)$ arasındaki ilişkiyi gösteren ve faktör yapı matrisi adı verilen $H: p \times m$ matrisi ile ortak faktörler için korelasyon matrisi adı verilen $\Theta: m \times m$ matrisinin bulunması da amaçlar arasındadır.

Eşitlik (3.3) ve (3.4) ile verilen faktör analizi modelleri p tane değişken üzerinde n tane birime ait ölçümlere (veri matrislerine) göre formüle edilebilir.

$\underline{X} - \underline{\mu} = L\underline{F} + \underline{\varepsilon}$ faktör modelinde, eşitliğin sol tarafında yer alan $\underline{X} - \underline{\mu} = \underline{X}^*$ vektörü ortalamadan sapma vektörü olarak bilinir. Başlangıç veri matrisi $X = [\underline{X}_1 \quad \underline{X}_2 \quad \dots \quad \underline{X}_n]: p \times n$ iken ortalamadan sapmalar veri matrisi $X^*_{p\times n} = [\underline{X}_1 - \underline{\mu} \quad \underline{X}_2 - \underline{\mu} \quad \dots \quad \underline{X}_n - \underline{\mu}]$ ve standart veri matrisi $Z_{p\times n} = [\underline{Z}_1 \quad \underline{Z}_2 \quad \dots \quad \underline{Z}_n]$ olmak üzere, tüm veri üzerinden faktör modeli:

$$X^*_{p\times n} = L_{p\times m} F_{m\times n} + B_{p\times p} U_{p\times n} \tag{3.18}$$

veya

$$Z_{p\times n} = L_{p\times m} F_{m\times n} + B_{p\times p} U_{p\times n} \tag{3,19}$$

şeklinde yazılabilir. Bu modeller için $E(F) = [0],\ Cov(F) = I_m, E(U) = [0], cov(U) = I_p$ ve $Cov(BU) = BCov(U)B' = BB' = K\text{öş}[b_1^2, \quad b_2^2, \quad \dots \quad , b_p^2]$ varsayımları sağlandığında modeller ortogonal faktör modeli adını alır. Burada $L_{p\times m}$: faktör yükleri matrisi ve $F_{m\times n}$: faktör skorları matrisidir. Faktör skorları matrisi;

$F = \begin{bmatrix} \underline{f_1} \\ \underline{f_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{f_m} \end{bmatrix}$ şeklinde $m \times n$ boyutlu yeni bir veri matrisi olup her bir satır vektörü bir faktöre ait n tane birimin faktör skorunu kapsamaktadır. Yani $k = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere n tane birimin k-ncı faktör skorları, $\underline{f_k} = [f_{k1} \quad f_{k2} \quad \dots \quad f_{kn}]$ şeklinde bir satır vektörüdür.

$B_{p\times p} = K\text{öş}[b_1, \quad b_2, \quad \dots \quad b_p]$ şeklinde katsayıların köşegen matrisi iken $U_{p\times n}$: özel faktör (hata) matrisidir.Bu modeller için kovaryans yapısının açıklanması ise sırasıyla Eşitlik (3.18) ile verilen model için;

$Cov(X^*) = \Sigma = LL' + BB', \quad (BB' = \Psi)$ ve

$Cov(Z) = \text{Kor}(X^*) = R = LL' + BB', \quad (BB' = \Psi)$

şeklinde olacaktır. Ayrıca $Cov(X^*\ ,\ F) = L$ ve $Cov(Z\ ,\ F) = L$’dir.

Eşitlik (3.18) ve (3.19) modellerinde özel faktöre ait “BU" terimini ihmal ederek eşitliklerin her iki tarafını sağdan F' ile çarpıp örnek birim sayısına bölelim. Bu takdirde elde edilen matrise faktör yapı matrisi denir ve başlangıç verileri için

$$H = \frac{X^*F'}{n} = \frac{LFF'}{n} \tag{3.20}$$

eşitliği ile standart veriler için ise

$$H = \frac{ZF'}{n} = \frac{LFF'}{n} \tag{3.21}$$

eşitliği ile verilir. Ayrıca;

$$\Theta = \frac{FF'}{n} \tag{3.22}$$

şeklinde bulunacak olan matrise ise ortak faktörler için korelasyon matrisi denir. Son iki eşitlikten görüldüğü üzere faktör yükleri matrisi ile faktör yapı matrisi arasındaki ilişki;

$H = L\Theta$ veya $L = H\Theta^{-1}$ denklemleri ile verilebilir.